

Научная статья

УДК 630.5

DOI 10.24419/LHI.2304-3083.2023.1.03

Динамическая модель роста культур сосны по среднему диаметру

Николай Николаевич Дубенок¹

доктор сельскохозяйственных наук, академик РАН

Александр Вячеславович Лебедев²

кандидат сельскохозяйственных наук

Валерий Васильевич Кузьмичев³

доктор биологических наук

Сергей Николаевич Волков⁴

кандидат биологических наук

Аннотация. Существует множество методов моделирования роста древостоев по среднему диаметру. В последние десятилетия наиболее распространены методы, на основе которых можно разработать модели, инвариантные относительно базового возраста. Цель исследования – моделирование роста лесных культур сосны по среднему диаметру с использованием обобщенного алгебраического разностного подхода. Для исследования отобраны данные обмеров в культурах сосны на 89 постоянных пробных площадях Лесной опытной дачи Российского государственного аграрного университета – МСХА имени К.А. Тимирязева. В результате исследования лесных культур сосны, произрастающих в сходных почвенно-климатических условиях, в качестве лучшей модели роста по среднему диаметру обосновано уравнение, базирующееся на обобщенном алгебраическом разностном подходе, которое является полиморфным, а прогнозируемые кривые имеют S-образную форму. Модель инвариантна относительно базового возраста прогнозирования и напрямую оценивает процесс роста на основе любого значения среднего диаметра и возраста, обеспечивая последовательные прогнозы. Разработанная модель может применяться в условиях, к которым относятся экспериментальные материалы. Рассмотренная методика рекомендуется для моделирования роста по среднему диаметру других лесобразующих пород России.

Ключевые слова: рост по диаметру, лесные культуры, сосна, модель роста, обобщенный алгебраический разностный подход

Для цитирования: Дубенок Н.Н., Лебедев А.В., Кузьмичев В.В., Волков С.Н. Динамическая модель роста культур сосны по среднему диаметру. – Текст : электронный // Лесохозяйственная информация. 2023. № 1. С. 31–43. DOI 10.24419/LHI.2304-3083.2023.1.03

¹ Российский государственный аграрный университет – МСХА им. К.А. Тимирязева, заведующий кафедрой сельскохозяйственных мелиораций, лесоводства и землеустройства (Москва, Российская Федерация), ndubenok@mail.ru

² Российский государственный аграрный университет – МСХА им. К.А. Тимирязева, доцент кафедры сельскохозяйственных мелиораций, лесоводства и землеустройства (Москва, Российская Федерация), alebedev@rgau-msha.ru

³ Российский государственный аграрный университет – МСХА им. К.А. Тимирязева, профессор, заведующий лабораторией кафедры сельскохозяйственных мелиораций, лесоводства и землеустройства (Москва, Российская Федерация), kuzmichev33valery@mail.ru

⁴ Российский государственный аграрный университет – МСХА им. К.А. Тимирязева, доцент, руководитель УНКЦ «Лесная опытная дача» (Москва, Российская Федерация), vergasovser@mail.ru

Original article

DOI 10.24419/LHI.2304-3083.2023.1.03

Dynamic Model of Growth by Mean Stand Diameter of Pine Plantations

Nikolay N. Dubenok¹

Doctor of Agricultural Sciences, Academician of the Russian Academy of Sciences

Aleksandr V. Lebedev²

Candidate of Agricultural Sciences

Valery V. Kuzmichev³

Doctor of Biological Sciences

Sergey N. Volkov⁴

Candidate of Biological Sciences

Abstract. There are many methods for modeling the growth of forest stands by mean diameter. In recent decades, methods have become most widespread, on the basis of which it is possible to develop models that are invariant with respect to the base age. The purpose of the study is to model the growth by the mean diameter of pine forest plantations using a generalized algebraic difference approach. For the study, data were selected from measurements of forest stands in pine plantations on 89 permanent sample plots of the Forest Experimental Station of the Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy. As a result of the study, for pine forest plantations growing in similar soil and climatic conditions, an equation based on a generalized algebraic difference approach, which is polymorphic, and the predicted curves are S-shaped, is substantiated as a better model for growth by mean diameter. The model is invariant with respect to the base prediction age and directly estimates the growth process based on any mean diameter and age value, thus providing consistent predictions. The developed model can be applied in the conditions to which the experimental materials belong. The considered technique can be used to model growth along the mean diameter of other forest-forming species in Russia.

Key words: diameter growth, forest plantations, pine, growth model, generalized algebraic difference approach

For citation: Dubenok N., Lebedev V., Kuzmichev V., Volkov N. Dynamic Model of Growth by Mean Stand Diameter of Pine Plantations – Text : electronic // Forestry information. 2023. № 1. P. 31–43. DOI 10.24419/LHI.2304-3083.2023.1.03

¹ Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy, Head of the Department of Agricultural Land Reclamation, Forestry and Land Management (Moscow, Russian Federation), ndubenok@mail.ru

² Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy, Associate Professor of the Department of Agricultural Land Reclamation, Forestry and Land Management (Moscow, Russian Federation), alebedev@rgau-msha.ru

³ Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy, Professor, Head of the Laboratory of the Department of Agricultural Land Reclamation, Forestry and Land Management (Moscow, Russian Federation), kuzmichev33valery@mail.ru

⁴ Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy, Professor, Head of the Forest Experimental Station, Forestry and Land Management (Moscow, Russian Federation), vergasovser@mail.ru

Введение

Эффективное управление лесами можно обеспечить только при наличии достоверной информации о количественных и качественных характеристиках насаждений в настоящее время и в будущем. Такая информация может быть получена на основе моделей роста и производительности древостоев. Моделирование роста и производительности древостоев было неотъемлемой частью лесохозяйственных исследований на протяжении длительного времени и остается актуальным в настоящее время [1]. Модели роста – полезные инструменты при лесоустройстве, оценке эффективности лесохозяйственных мероприятий и в целом при планировании управления лесами [2–4]. В зависимости от целей ведения лесного хозяйства модели могут давать прогноз либо на уровне отдельного дерева, либо на уровне древостоя. Кроме того, они позволяют осуществлять прогноз на основе таксационных показателей древостоя и периода прогнозирования. В России лесное хозяйство базируется на уровне лесотаксационных выделов, поэтому модели на уровне древостоя полностью обеспечивают получение необходимой информации о количественных показателях.

Средний диаметр относится к одному из ключевых таксационных показателей древостоев. На его основе можно получить информацию о распределении деревьев по размерам, товарной структуре и др. Существует множество методов моделирования роста древостоев по среднему диаметру. В последние десятилетия наибольшее распространение получили методы, на основе которых можно разработать модели, инвариантные относительно базового возраста [5]. Такие модели считаются наиболее подходящими для обработки данных постоянных пробных площадей [6].

Первые инвариантные относительно базового возраста модели были получены с применением алгебраического разностного подхода (ADA) [7]. Этот метод позволяет использовать ряд полученных для древостоя значений «диаметр – возраст» даже в том случае, если средний диаметр в базовом возрасте не определялся [8, 9]. Недостаток метода

ADA заключается в том, что в модели лишь один параметр является специфичным для объекта (в нашем случае для древостоя). Поэтому такая модель пригодна только для прогнозирования набора анаморфных кривых с общей асимптотой [10]. В дальнейшем была разработана более совершенная методология моделирования – обобщенный алгебраический разностный подход (GADA), где более чем один параметр является специфичным для объекта [8]. Модели GADA прогнозируют полиморфные кривые с несколькими асимптотами, что является положительным свойством с точки зрения учета биологических особенностей деревьев и древостоев [10]. Модель GADA позволяет сопоставлять данные коротких временных рядов, даже если в них нет общего базового возраста [6, 11]. Поскольку GADA является математически надежным и реалистичным подходом к моделированию, то данный метод стал стандартом для разработки моделей роста, например доминантной [12–14], и средней высоты древостоев [5, 15], суммы площадей поперечных сечений [16, 17], биомассы деревьев [18] и диаметров отдельных деревьев [19].

В России наиболее распространены статические модели, в которых для каждого класса бонитета или типа условий местопроизрастания оценивается отдельная кривая роста. Основываясь на этих принципах, составлено большое количество таблиц хода роста лесообразующих пород для разных регионов. Однако динамические модели роста древостоев по таксационным показателям в нашей стране к настоящему моменту остаются не изученными. Поэтому цель исследования – выполнить моделирование роста лесных культур сосны по среднему диаметру на основе данных долговременных наблюдений на постоянных пробных площадях с помощью различных уравнений, полученных с применением обобщенного алгебраического разностного подхода.

Материалы и методы исследования

Объектом исследования являются лесные культуры сосны, произрастающие на постоянных

пробных площадях в Лесной опытной даче Российского государственного аграрного университета – МСХА имени К.А. Тимирязева. Согласно первому проекту организации и ведения лесного хозяйства, составленному А.Р. Варгасом де Бедемаром, лесокультурные работы начали осуществлять здесь в 1869 г. Большинство опытных участков с лесными культурами было заложено в последней четверти XIX в. В результате лесокультурных работ к 1902 г. площадь культур сосны составляла 60 га (практически ¼ площади Лесной опытной дачи). По итогам лесоустройства 2009 г., лесные культуры сосны произрастали на площади 65 га со средним запасом 330 м³/га [20, 21].

Для исследования были отобраны данные обмеров древостоев в культурах сосны на 89 постоянных пробных площадях. Возраст культур на момент проведения измерений – от 13 до 146 лет. Минимальная средняя высота древостоев – 3,7 м, максимальная – 29,9 м. Минимальный средний диаметр – 3,0 см, максимальный – 42,7 см. Для анализа исходные данные случайным образом разделяли в соотношении 7:3 на обучающую выборку, которую использовали для подгонки

модели, и тестовую, на которой выполняли проверку ее обобщающей способности. Оценки для итоговой модели получены по всей выборке.

Для построения модели роста по среднему диаметру применяли метод GADA, который предполагает выполнение следующих шагов [22]: 1) выбор базовой функции роста для моделирования изучаемой переменной; 2) принятие решения, какие параметры базового уравнения будут соотноситься с переменной роста древостоя (X), и выражение этой связи математическим уравнением; 3) решение уравнения для X ; 4) получение динамической трехмерной модели в форме $Y = f(t, t_0, X_0)$ путем подстановки решения X в уравнение $Y = f(t, X)$ для начальных условий t_0 и X_0 . Если с X связан только один параметр, то GADA является эквивалентным ADA.

Для анализа использовали 24 уравнения (табл. 1), полученные с помощью подхода GADA. Для многих из них приводятся сравнительные оценки в литературных источниках [11]. Из рассматриваемых моделей 4 анаморфные уравнения (R1, L1, H3 и H5), 6 общие асимптотические полиморфные (R2, R3, L2, H1, H2 и C4) и остальные

ТАБЛИЦА 1. ФУНКЦИИ РОСТА И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО РАЗНОСТНОГО ПОДХОДА

№	ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ	РЕШЕНИЕ ДЛЯ X С НАЧАЛЬНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ (y_0, t_0)	ДИНАМИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ
Richards [23] $y = a(1 - \exp(-bt))^c$			
R1	$a = X$	$X_0 = \frac{y_0}{(1 - \exp(-bt_0))^c}$	$y = y_0 \left(\frac{1 - \exp(-bt)}{1 - \exp(-bt_0)} \right)^c$
R2	$b = X$	$X_0 = \frac{-\ln \left(1 - \left(\frac{y_0}{a} \right)^{\frac{1}{c}} \right)}{t_0}$	$y = a \left(1 - \left(1 - \left(\frac{y_0}{a} \right)^{\frac{1}{c}} \right)^{\frac{t}{t_0}} \right)^c$
R3	$c = X$	$X_0 = \frac{\ln \left(\frac{y_0}{a} \right)}{\ln(1 - \exp(-bt_0))}$	$y = a \left(\frac{y_0}{a} \right)^{\frac{\ln(1 - \exp(-bt))}{\ln(1 - \exp(-bt_0))}}$
R4	$a = \exp(X),$ $c = c_1 + c_2 X$	$X_0 = \frac{\ln(y_0) - c_1 F_0}{1 + c_2 F_0},$ $F_0 = \ln(1 - \exp(-bt_0))$	$y = \exp(X_0)(1 - \exp(-bt))^{c_1 + c_2 X_0}$
R5	$a = \exp(X),$ $c = c_1 + \frac{c_2}{X}$	$X_0 = \frac{1}{2}(\ln(y_0) - c_1 F_0 + ((\ln(y_0) - c_1 F_0)^2 - 4c_2 F_0)^{\frac{1}{2}}),$ $F_0 = \ln(1 - \exp(-bt_0))$	$y = y_0 \left(\frac{1 - \exp(-bt)}{1 - \exp(-bt_0)} \right)^{c_1 + \frac{c_2}{X_0}}$

ПРОДОЛЖЕНИЕ ТАБЛ. 1

№	ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ	РЕШЕНИЕ ДЛЯ X С НАЧАЛЬНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ (y_0, t_0)	ДИНАМИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ
R6	$a = \exp(X),$ $c = c_1 + \frac{1}{X}$	$X_0 = \frac{1}{2}(\ln(y_0) - c_1 F_0 + ((c_1 F_0 - \ln(y_0))^2 - 4 F_0)^{\frac{1}{2}}),$ $F_0 = \ln(1 - \exp(-b t_0))$	$y = \exp(X_0)(1 - \exp(-b t))^{\frac{c_1 + 1}{X_0}}$
R7	$a = \exp(a_1 X),$ $c = c_1 + \frac{1}{X}$	$X_0 = \frac{\ln(y_0)}{a_1 + F_0},$ $F_0 = \ln(1 - \exp(-b t_0))$	$y = \exp(a_1 X_0)(1 - \exp(-b t))^{X_0}$
Lundqvist [24] $y = a \exp(-b t^{-c})$			
L1	$a = X$	$X_0 = \frac{y_0}{\exp(-b t_0^{-c})}$	$y = y_0 \exp(b(t_0^{-c} - t^{-c}))$
L2	$b = X$	$X_0 = \frac{-\ln\left(\frac{y_0}{a}\right)}{t_0^{-c}}$	$y = a \left(\frac{h_0}{a}\right)^{\left(\frac{t_0}{t}\right)^c}$
L3	$a = \exp(X),$ $b = b_1 + \frac{1}{X}$	$X_0 = \frac{1}{2} t_0^{-c} \left(b_1 + t_0^{-c} \ln(y_0) + \sqrt{4 t_0^{-c} + (-b_1 - t_0^{-c} \ln(y_0))^2} \right)$	$y = \exp(X_0) \exp\left(-\left(b_1 + \left(\frac{1}{X_0}\right)\right) t^{-c}\right)$
L4	$a = \exp(X),$ $b = b_1 + \frac{b_2}{X}$	$X_0 = \frac{1}{2} t_0^{-c} \left(b_1 + t_0^{-c} \ln(y_0) + \sqrt{4 b_2 t_0^{-c} + (-b_1 - t_0^{-c} \ln(y_0))^2} \right)$	$y = \exp(X_0) \exp\left(-\left(b_1 + \left(\frac{b_2}{X_0}\right)\right) t^{-c}\right)$
L5	$a = \exp(a_1 X),$ $b = X$	$X_0 = \frac{\ln(y_0)}{a_1 - t_0^{-c}}$	$y = \exp(a_1 X_0) \exp(-X_0 t^{-c})$
Hossfeld [25] $y = \frac{t^2}{a + b t + c t^2}$			
H1	$a = X$	$X_0 = \left(\frac{t_0^2}{y_0}\right) - b t_0 - c t_0^2$	$y = y_0 \frac{t^2}{t_0^2 + y_0(b(t - t_0) + c(t^2 - t_0^2))}$
H2	$b = X$	$X_0 = \left(\frac{t_0}{y_0}\right) - \frac{a}{t_0} - c t_0$	$y = y_0 \frac{t}{t_0 + y_0(a(t^{-1} - t_0^{-1}) + c(t - t_0))}$
H3	$c = X$	$X_0 = \left(\frac{1}{y_0}\right) - a t_0^{-2} - b t_0^{-1}$	$y = y_0 \frac{1}{1 + y_0(a(t^{-2} - t_0^{-2}) + b(t^{-1} - t_0^{-1}))}$
Hossfeld IV [25] $y = \frac{b t^c}{t^c + a}$			
H4	$a = \frac{a_1}{X},$ $b = b_1 + X$	$X_0 = y_0 - a_1 + \left((y_0 - a_1)^2 + \frac{2 y_0 \exp(b_1)}{t_0^c}\right)^{\frac{1}{2}}$	$y = y_0 \frac{t^c (t_0^c X_0 + \exp(b_1))}{t_0^c (t^c X_0 + \exp(b_1))}$
Hossfeld IV [25] $y = \frac{t^c}{b + a t^c}$			
H5	$a = X,$ $b = b_1 X$	$X_0 = \frac{\frac{t_0^c}{y_0}}{b_1 + t_0^c}$	$y = \frac{t^c}{X_0(b_1 + t^c)}$
Cieszewski [10] $y^3 = \frac{b t^c}{t^{c-1} + a}$			
C1	$a = \frac{a_1}{2X},$ $b = b_1 + X$	$X_0 = \frac{1}{2} \left(y_0^3 t_0^{-1} - b_1 + ((y_0^3 t_0^{-1} - b_1)^2 + 2 a_1 y_0^3 t_0^{-c})^{\frac{1}{2}} \right)$	$y = y_0 \left(\frac{t^c (t_0^{c-1} X_0 + a_1)}{t_0^c (t^{c-1} X_0 + a_1)} \right)^{\frac{1}{3}}$

№	ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ	РЕШЕНИЕ ДЛЯ X С НАЧАЛЬНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ (y_0, t_0)	ДИНАМИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ
Cieszewski, Bella [25] $y = \frac{a}{1+bt^{-c}}$			
C2	$a = a_1 + X,$ $b = b_1 X$	$X_0 = \frac{y_0 - a_1}{1 - b_1 y_0 t_0^{-c}}$	$y = \frac{a_1 + X_0}{1 + b_1 X_0 t^{-c}}$
C3	$a = a_1 + X,$ $b = \frac{b_1}{X}$	$X_0 = \frac{1}{2} \left(y_0 - a_1 + ((y_0 - a_1)^2 + 4b_1 y_0 t_0^{-c})^{\frac{1}{2}} \right)$	$y = \frac{a_1 + X_0}{1 + \frac{b_1}{X_0} t^{-c}}$
C4	$b = X$	$X_0 = \frac{a - y_0}{y_0 t_0^{-c}}$	$y = \frac{a}{1 - \left(1 - \frac{a}{y_0} \right) \left(\frac{t_0}{t} \right)^c}$
Schumacher [26] $\ln(y) = a + bt^c$			
S1	$a = X,$ $b = \frac{b_1}{X}$	$X_0 = \frac{1}{2} \left(\ln(y_0) + (\ln^2(y_0) - 4b_1 t_0^c)^{\frac{1}{2}} \right)$	$y = \exp \left(X_0 - \left(\frac{b_1}{X_0} \right) t^c \right)$
Weibull modified [27] $\ln(y) = a + b \ln(1 - \exp(-t^c))$			
W1	$a = X,$ $b = b_1 + b_2 X$	$X_0 = \frac{\ln(y_0) - b_1 \ln(1 - \exp(-t_0^c))}{1 + b_2 \ln(1 - \exp(-t_0^c))}$	$y = \exp(X_0 + (b_1 + b_2 X_0) \ln(1 - \exp(-t^c)))$
Gompertz modified [28] $y = a \exp(-b \exp(-ct)) + d$			
G1	$a = X,$ $d = -d_1 X - d_2$	$X_0 = \exp(-b \exp(-ct_0)),$ $X_1 = \exp(-b \exp(-ct_0))$	$y = \frac{X_0(d_2 + y_0) - d_1 y_0 - d_2 X_1}{X_1 - d_1}$

Примечание: y – предсказанный по модели средний диаметр в возрасте t ; y_0 – начальное значение среднего диаметра в возрасте t_0 ; X, F – вспомогательные переменные; a, b, c, d – параметры модели.

15 – полиморфные уравнения множественных асимптот.

Статистические показатели (корень из среднеквадратической ошибки, средний абсолютный процент ошибки, коэффициент детерминации, скорректированный коэффициент детерминации, информационные критерии Акаике и Байеса), используемые для оценки качества каждой модели, представлены в табл. 2. Кроме того, в основу выбора лучшей модели был положен графический анализ прогностической способности каждой из моделей и значимости оценок их параметров. Значимость числовых коэффициентов оценивалась с помощью t -критерия Стьюдента при критическом значении $\alpha = 0,05$ [13].

С учетом графического анализа соответствия прогнозируемых значений фактическим и остатков, оценки значимости числовых коэффициентов модель, для которой также получены наибольшие

значения коэффициентов детерминации и наименьшие значения информационных критериев, среднеквадратической ошибки и среднего процента абсолютной ошибки, признавалась в качестве лучшей. Анализ данных проводили с использованием Python 3.5 + NumPy 1.17.1 + SciPy 1.3.2 и R 3.6.3 + lme4 1.1.

Результаты и обсуждение

Итоговая сводка по 5 лучшим моделям для обучающей и тестовой выборки представлена в табл. 3. В перечень вошли следующие модели: R3, R5, H1, W1 и G1. На обучающей выборке для них MAPE составляет от 4,0 до 4,8 %. На тестовой выборке эти значения почти совпадают с полученными для обучающей выборки. Для RMSE, AIC, BIC в большинстве случаев получены значения,

ТАБЛИЦА 2. КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА МОДЕЛЕЙ

№	ПОКАЗАТЕЛЬ	ФОРМУЛА
1	Корень из среднеквадратической ошибки (RMSE)	$RMSE = \sqrt{\sum \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}$
2	Средний абсолютный процент ошибки (MAPE)	$MAPE = 100 \times \sum \left \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right / n$
3	Коэффициент детерминации (R^2)	$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$
4	Скорректированный коэффициент детерминации ($R^2_{adj.}$)	$R^2_{adj.} = 1 - (1 - R^2) \frac{(n-1)}{(n-k)}$
5	Информационный критерий Акаике (AIC)	$AIC = 2k + n \ln \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}$
6	Информационный критерий Байеса (BIC)	$BIC = k \ln n + n \ln \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}$

Примечание: k – количество параметров модели; n – количество наблюдений; y_i – фактическое значение; $\hat{y}_i$ – предсказанное по модели значение; $\bar{y}$ – среднее значение по выборке.

ТАБЛИЦА 3. КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА ПЯТИ ЛУЧШИХ МОДЕЛЕЙ

№	ОБУЧАЮЩАЯ ВЫБОРКА						ТЕСТОВАЯ ВЫБОРКА					
	RMSE	MAPE	R^2	$R^2_{adj.}$	AIC	BIC	RMSE	MAPE	R^2	$R^2_{adj.}$	AIC	BIC
R3	1,620	4,369	0,919	0,919	5 324,1	5 337,3	1,599	4,345	0,920	0,920	2 224,0	2 235,5
R5	1,621	4,372	0,919	0,919	5 334,3	5 354,2	1,600	4,348	0,920	0,920	2 229,4	2 246,7
H1	1,478	3,987	0,933	0,932	4 311,6	4 324,8	1,472	3,999	0,933	0,932	1 833,5	1 845,0
W1	1,806	4,849	0,899	0,899	6 527,5	6 547,4	1,789	4,819	0,900	0,900	2 756,5	2 773,8
G1	1,627	4,399	0,918	0,918	5 376,7	5 403,2	1,616	4,381	0,919	0,919	2 277,8	2 300,8

близкие к минимальным, а для R^2 и $R^2_{adj.}$ – к максимальным среди всех рассматриваемых моделей. Поэтому эти уравнения можно считать наиболее подходящими для моделирования роста лесных культур сосны по среднему диаметру в конкретных лесорастительных условиях.

Графический анализ прогнозных трендов средних диаметров показал, что, несмотря на минимальные значения RMSE, MAPE, AIC, BIC и максимальные R^2 , $R^2_{adj.}$ для модели H1, наилучшее соответствие биологическим закономерностям роста получено для модели R3. Анализируя итоговые значения метрик качества и статистическую значимость коэффициентов уравнений (табл. 4),

в качестве лучшей модели из всех рассматриваемых принято общее асимптотическое полиморфное уравнение для базовой функции Richards с заменой параметра, отвечающего за форму кривой (модель R3). Для него получены статистически достоверные оценки параметров при $p < 0,05$. Так как все изучаемые древостои находятся в сходных почвенно-климатических условиях, то независимо от начальных параметров роста проявляется общая асимптота (49,4 м), но при этом каждая кривая обладает специфической формой.

Графический анализ остатков для модели R3 не выявляет явную тенденцию переоценки или недооценки прогнозируемых значений средних

ТАБЛИЦА 4. Оценки параметров пяти лучших моделей

Модель	Параметр	Оценка	T-СТАТИСТИКА	P-ЗНАЧЕНИЕ
R3	a	4,937e+01	9,740e+01	$< 2e-16$
	b	8,052e-03	3,825e+01	$< 2e-16$
R5	b	8,049e-03	3,788e+01	$< 2e-16$
	c_1	-1,346e+03	-1,951e+00	5,107e-02
	c_2	5,253e+03	1,954e+00	5,079e-02
H1	b	2,365e+00	1,006e+02	$< 2e-16$
	c	1,197e-02	8,014e+01	$< 2e-16$
W1	b_1	3,987e+05	3,814e-01	7,029e-01
	b_2	-9,527e+04	-3,814e-01	7,029e-01
	c	2,282e-01	1,019e+02	$< 2e-16$
G1	b	-1,269e+00	-1,561e-02	9,875e-01
	c	3,307e-03	2,754e-02	9,780e-01
	d_1	6,199e+03	9,182e-03	9,927e-01
	d_2	1,478e+05	4,748e+00	2,105e-06

диаметров как на обучающей, так и на тестовой выборках (рис. 1). Большинство точек данных выстраивается вдоль горизонтальной оси. Гистограммы остатков близки к нормальному распределению, что указывает на отсутствие значительной асимметрии. Дисперсия остатков при разных значениях предсказанных диаметров в целом демонстрирует отсутствие явно выраженных тенденций. Максимальные абсолютные отклонения прогнозов от фактических значений

достигают 6,7 см, а подавляющее большинство остатков находится в диапазоне от -2,0 до 2,0 см.

По всей выборке получено итоговое уравнение (R3) возрастного тренда роста культур сосны по среднему диаметру:

$$D = 49,51 \left(\frac{D_0}{49,51} \right)^{\frac{\ln(1 - \exp(-0,007994t))}{\ln(1 - \exp(-0,007994t_0))}},$$

где:

D – предсказанный по модели средний диаметр в возрасте t ;

D_0 – начальное значение среднего диаметра в возрасте t_0 .

Оценки параметров уравнения являются статистически значимыми (при $p < 0,05$). Для итоговой модели $RMSE = 1,614$, $MAPE = 4,362$, $R^2 = 0,919$ и $R^2\text{-adj.} = 0,919$. Разработанная модель роста по среднему диаметру культур сосны по показателю MAPE соответствует точности определения средних диаметров, которая предъявляется Лесоустроительной инструкцией к таксации лесов (приказ Минприроды России от 29.03.2018 № 122 «Об утверждении Лесоустроительной инструкции»). Допустимая случайная ошибка определения среднего диаметра преобладающей породы составляет от $\pm 10\%$ при

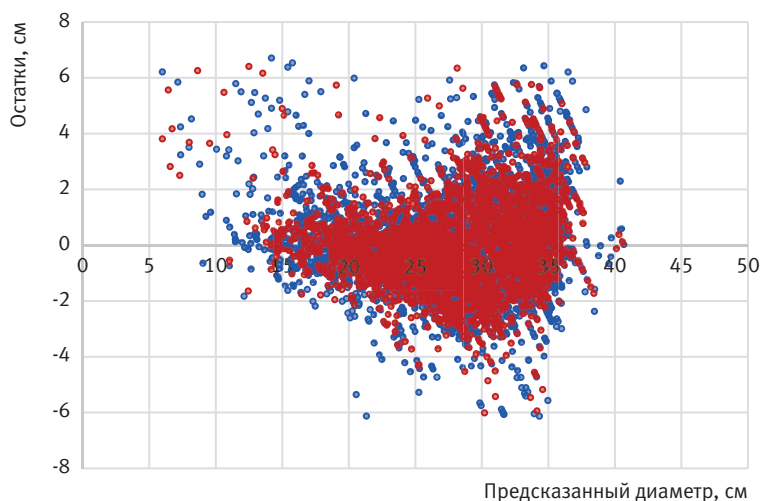


Рис. 1. График остатков модели для обучающей (синий цвет) и тестовой (красный цвет) выборки

глазомерно-измерительном способе таксации до $\pm 20\%$ при аналитико-измерительном дешифрировании стереоаэроснимков, космических снимков (при таксации малоосвоенных лесов) и актуализации.

Модель пригодна для использования в диапазоне возрастов от 10 до 150 лет. Графическая визуализация динамики средних диаметров по модели для высоко-, средне- и низкопродуктивных древостоев в диапазоне исходных данных в сравнении с эмпирическими возрастными трендами показана на рис. 2. Во всех случаях смоделированные кривые роста по среднему диаметру отражают динамику фактических древостоев. Прогнозируемые кривые обеспечивают полиморфизм роста по среднему диаметру и сигмовидную форму, а также проходят синхронно с эмпирическими.

Модели роста древостоев, основанные на применении методологии GADA, рекомендуются во многих исследованиях, так как они позволяют более реалистично передать процесс изменения таксационных показателей с увеличением возраста и имеют более гибкие оценки по сравнению с ранее разрабатываемыми моделями зависимости таксационных показателей от возраста древостоя [8, 10, 29].

Для более точной оценки прогнозных значений таксационных показателей древостоев предпочтительными являются модели, инвариантные относительно базового возраста и основанные на более реалистичном описании процесса роста. Такие соотношения между таксационными показателями и возрастом, полученные с применением GADA, могут успешно применяться в имитационных моделях таксационных показателей на уровне отдельных древостоев.

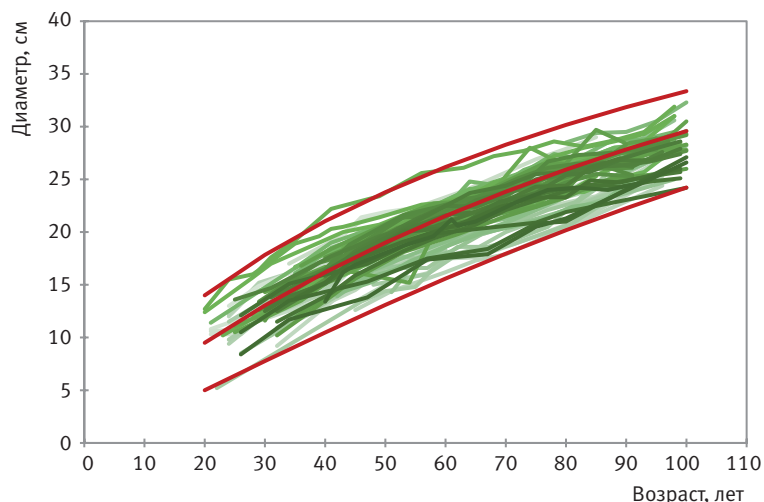


Рис. 2. НАБЛЮДАЕМЫЕ (ЗЕЛЕНЫЕ) И СМОДЕЛИРОВАННЫЕ (КРАСНЫЕ) КРИВЫЕ РОСТА ПО СРЕДНЕМУ ДИАМЕТРУ

Заключение

Для лесных культур сосны, произрастающих в сходных почвенно-климатических условиях, в качестве лучшей модели роста по среднему диаметру обосновано уравнение, базирующееся на методологии GADA, которое является полиморфным, а прогнозируемые кривые имеют S-образную форму. Модель инвариантна относительно базового возраста прогнозирования и напрямую оценивает процесс роста на основе любого значения среднего диаметра и возраста, тем самым обеспечивая последовательные прогнозы. Разработанная модель может применяться в тех условиях, к которым относятся экспериментальные материалы. Рассмотренная в исследовании методика рекомендуется для разработки динамических моделей роста по среднему диаметру других лесообразующих пород России.

Список источников

1. Vanclay, J.K. Modelling Forest Growth and Yield: Applications to Mixed Tropical Forests / J.K. Vancly. – Wallingford : CABI, 1994. – 312 p.
2. Атрощенко, О.А. Моделирование роста леса и лесохозяйственных процессов / О.А. Атрощенко. – Минск : БГТУ, 2004. – 249 с.
3. Богачев, А.В. Лесотаксационные исследования / А.В. Богачев. – Москва : ВНИИЛМ, 2007. – 344 с.
4. Хлюстов, В.К. Товарно-денежный потенциал древостоев и оптимизация лесопользования / В.К. Хлюстов, А.В. Лебедев. – Иркутск : Мегатраст, 2017. – 328 с.
5. Лебедев, А.В. Прогнозирование роста по средней высоте культур сосны с использованием обобщенного алгебраического разностного подхода / А.В. Лебедев // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. – 2022. – Вып. 238. – С. 49–66. – DOI: 10.21266/2079-4304.2022.238.49-66.
6. Modelling dominant height growth from national forest inventory individual tree data with short time-series and large age errors / R.P. Sharma, A. Brunner, T. Eid, B.H. Øyen // Forest Ecology and Management. – 2011. – № 262. – P. 2162–2175.
7. Bailey, R.L. Base-age invariant polymorphic site curves / R.L. Bailey, J.L. Clutter // Forest Science. – 1974. – № 20. – P. 155–159.
8. Cieszewski, C.J. Generalized algebraic difference approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes / C.J. Cieszewski, R.L. Bailey // Forest Science. – 2000. – № 46. – P. 116–126.
9. Nord-Larsen, T. Developing dynamic site index curves for European beech (*Fagus sylvatica* L.) in Denmark / T. Nord-Larsen // Forest Science. – 2006. – № 52. – P. 173–181.
10. Cieszewski, C.J. Developing a well-behaved dynamic site equation using a modified Hossfeld IV function $Y^3 = (ax^m) / (c + x^{m-1})$, a simplified mixed model and scant subalpine fir data / C.J. Cieszewski // Forest Science. – 2003. – № 49. – P. 539–554.
11. García, O. Comparing and combining stem analysis and permanent sample plot data in site index models / O. García // Forest Science. – 2005. – № 51. – P. 277–283.
12. Modeling dominant height growth of maritime pine in Portugal using GADA methodology with parameters depending on soil and climate variables / L. Nunes, M. Patrício, J. Tomé, M. Tomé // Annals of Forest Science. – 2011. – № 68. – P. 311–323. – DOI 10.1007/s13595-011-0036-8.
13. Models of dominant height growth and site indexes for *Pinus ayacahuite* Ehren / M. Hernández-Cuevas, W. Santiago-García, H.M. De los Santos-Posadas, P. Martínez-Antúnez, F. Ruiz-Aquino // Agrociencia. – 2018. – № 52. – P. 437–453.
14. Site Index Models for Main Forest-Forming Tree Species in Poland / J. Socha, L. Tyminińska-Czabańska, E. Grabska, S. Orzeł // Forests. – 2020. – № 11. – id 301. – DOI: 10.3390/f11030301.
15. Лебедев, А.В. Построение бонитетной шкалы с использованием обобщенного алгебраического разностного подхода / А.В. Лебедев, В.В. Кузьмичев // Сибирский лесной журнал. – 2022. – № 3. – DOI: 10.15372/SJFS20220307.
16. Development of a basal area growth system for maritime pine in northwestern Spain using the generalized algebraic difference approach / M. Barrio Anta, F. Castedo Dorado, U. Diéguez-Aranda, J.G. Álvarez González, B.R. Parresol, R. Rodríguez Soalleiro // Canadian Journal of Forest Research. – 2006. – № 36. – P. 1461–1474.
17. Modelling stand basal area growth for radiata pine plantations in Northwestern Spain using the GADA / F. Castedo-Dorado, U. Diéguez-Aranda, M. Barrio-Anta, J.G. Álvarez-González // Ann. For. Sci. – 2007. – № 64. – P. 609–619. DOI: 10.1051/forest:2007039.
18. Modelling individual tree diameter growth for Norway spruce in the Czech Republic using a generalized algebraic difference approach / R.P. Sharma, Z. Vacek, S. Vacek, V. Jansa, M. Kučera // Journal of Forest Science. – 2017. – № 63. – P. 227–238. – DOI: 10.17221/135/2016-JFS.

19. A generalized algebraic difference approach allows an improved estimation of aboveground biomass dynamics of *Cunninghamia lanceolata* and *Castanopsis sclerophylla* forests / X. Tang, L. Fehrmann, F. Guan, D.I. Forrester, R. Guisasola, C. Pérez-Cruzado, T. Vor, Y. Lu, J.G. Álvarez González, C. Kleinn // *Annals of Forest Science*. – 2017. – № 74. – id 12. – DOI: 10.1007/s13595-016-0603-0.
20. Дубенок, Н.Н. Модель смешанных эффектов зависимости высот от диаметров деревьев в сосновых древостоях / Н.Н. Дубенок, В.В. Кузьмичев, А.В. Лебедев // *Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии*. – 2021. – № 237. – С. 59–74. – DOI 10.21266/2079-4304.2021.237.59-74.
21. Географические культуры сосны в лесной опытной даче Тимирязевской академии: к 180-летию М.К. Турского / В.Д. Наумов, Н.Л. Поветкина, А.В. Лебедев, А.В. Гемонов. – Москва : МЭСХ, 2019. – 182 с.
22. Cieszewski, C.J. New dynamic site equation that fits best the Schwappach data for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) in Central Europe / C.J. Cieszewski, M. Strub, M. Zasada // *For Ecol Manag.* – 2007. – № 243. – P. 83–93. – DOI: 10.1016/j.foreco.2007.02.025.
23. Richards, F.J. A flexible growth function for empirical use / F.J. Richards // *J Exp Bot.* – 1959. – № 10. – P. 290–300.
24. Lundqvist, B. On the height growth in cultivated stands of pine and spruce in Northern Sweden / B. Lundqvist // *Medd Fran Statens Skogforsk.* – 1957. – № 47. – P. 1–64.
25. Cieszewski, C.J. Polymorphic height growth and site index curves for Lodgepole Pine in Alberta / C.J. Cieszewski, I.E. Bella // *Canadian Journal of Forest Research*. – 1989. – № 19. – P. 1151–1160.
26. Schumacher, F.X. A new growth curve and its application to timber yield studies / F.X. Schumacher // *J. For.* – 1939. – № 37. – P. 819–820.
27. Yang, R.C. The potential of Weibull-type functions as flexible growth curves / R.C. Yang, A. Kozak, J.H.G. Smith // *Canadian Journal of Forest Research*. – 1978. – № 8 (4). – P. 424–431.
28. Jarosz, K. Modelowanie wzrostu wysokosci przy pomocy funkcji Gomperta / K. Jarosz, B. Klapac // *Sylvan.* – 2002. – № 4. – P. 35–42.
29. Ercanli, İ. Dynamic base-age invariant site index models based on generalized algebraic difference approach for mixed Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) and Oriental beech (*Fagus orientalis* Lipsky) stands / İ. Ercanli, A. Kahriman, H. Yavuz // *Turk J. Agric. For.* – 2014. – № 38. – P. 134–147. – DOI:10.3906/tar-1212-67.

References

1. Vanclay, J.K. Modelling Forest Growth and Yield: Applications to Mixed Tropical Forests / J.K. Vancly. – Wallingford : CABI, 1994. – 312 p.
2. Atroshchenko, O.A. Modelirovanie rosta lesa i lesohozyajstvennyh processov / O.A. Atroshchenko. – Minsk : BGTU, 2004. – 249 s.
3. Bogachev, A.V. Lesotaksacionnye issledovaniya / A.V. Bogachev. – Moskva : VNIILM, 2007. – 344 s.
4. Hlyustov, V.K. Tovarno-denezhnyj potencial drevostoev i optimizaciya lesopol'zovaniya / V.K. Hlyustov, A.V. Lebedev. – Irkutsk : Megaprint, 2017. – 328 s.
5. Lebedev, A.V. Prognozirovanie rosta po srednej vysote kul'tur sosny s ispol'zovaniem obobshchennogo algebraicheskogo raznostnogo podhoda / A.V. Lebedev // *Izvestiya Sankt-Peterburgskoj lesotekhnicheskoy akademii*. – 2022. – Vyp. 238. – S. 49–66. – DOI: 10.21266/2079-4304.2022.238.49-66.
6. Modelling dominant height growth from national forest inventory individual tree data with short time-series and large age errors / R.P. Sharma, A. Brunner, T. Eid, B.H. Øyen // *Forest Ecology and Management*. – 2011. – № 262. – P. 2162–2175.
7. Bailey, R.L. Base-age invariant polymorphic site curves / R.L. Bailey, J.L. Clutter // *Forest Science*. – 1974. – № 20. – P. 155–159.

8. Cieszewski, C.J. Generalized algebraic difference approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes / C.J. Cieszewski, R.L. Bailey // Forest Science. – 2000. – № 46. – P. 116–126.
9. Nord-Larsen, T. Developing dynamic site index curves for European beech (*Fagus sylvatica* L.) in Denmark / T. Nord-Larsen // Forest Science. – 2006. – № 52. – P. 173–181.
10. Cieszewski, C.J. Developing a well-behaved dynamic site equation using a modified Hossfeld IV function $Y^3 = (ax^m) / (c + x^{m-1})$, a simplified mixed model and scant subalpine fir data / C.J. Cieszewski // Forest Science. – 2003. – № 49. – P. 539–554.
11. García, O. Comparing and combining stem analysis and permanent sample plot data in site index models / O. García // Forest Science. – 2005. – № 51. – P. 277–283.
12. Modeling dominant height growth of maritime pine in Portugal using GADA methodology with parameters depending on soil and climate variables / L. Nunes, M. Patrício, J. Tomé, M. Tomé // Annals of Forest Science. – 2011. – № 68. – P. 311–323. – DOI 10.1007/s13595-011-0036-8.
13. Models of dominant height growth and site indexes for *Pinus ayacahuite* Ehren / M. Hernández-Cuevas, W. Santiago-García, H.M. De los Santos-Posadas, P. Martínez-Antúnez, F. Ruiz-Aquino // Agrociencia. – 2018. – № 52. – P. 437–453.
14. Site Index Models for Main Forest-Forming Tree Species in Poland / J. Socha, L. Tyminińska-Czabańska, E. Grabska, S. Orzeł // Forests. – 2020. – № 11. – id 301. – DOI: 10.3390/f11030301.
15. Lebedev, A.V. Postroenie bonitetnoj shkaly s ispol'zovaniem obobshchennogo algebraicheskogo raznostnogo podhoda / A.V. Lebedev, V.V. Kuz'michev // Sibirskij lesnoj zhurnal. – 2022. – № 3. – DOI: 10.15372/SJFS20220307.
16. Development of a basal area growth system for maritime pine in northwestern Spain using the generalized algebraic difference approach / M. Barrio Anta, F. Castedo Dorado, U. Diéguez-Aranda, J.G. Álvarez González, B.R. Parresol, R. Rodríguez Soalleiro // Canadian Journal of Forest Research. – 2006. – № 36. – P. 1461–1474.
17. Modelling stand basal area growth for radiata pine plantations in Northwestern Spain using the GADA / F. Castedo-Dorado, U. Diéguez-Aranda, M. Barrio-Anta, J.G. Álvarez-González // Ann. For. Sci. – 2007. – № 64. – P. 609–619. DOI: 10.1051/forest:2007039.
18. Modelling individual tree diameter growth for Norway spruce in the Czech Republic using a generalized algebraic difference approach / R.P. Sharma, Z. Vacek, S. Vacek, V. Jansa, M. Kučera // Journal of Forest Science. – 2017. – № 63. – P. 227–238. – DOI: 10.17221/135/2016-JFS.
19. A generalized algebraic difference approach allows an improved estimation of aboveground biomass dynamics of *Cunninghamia lanceolata* and *Castanopsis sclerophylla* forests / X. Tang, L. Fehrmann, F. Guan, D.I. Forrester, R. Guisasola, C. Pérez-Cruzado, T. Vor, Y. Lu, J.G. Álvarez González, C. Kleinn // Annals of Forest Science. – 2017. – № 74. – id 12. – DOI: 10.1007/s13595-016-0603-0.
20. Dubenok, N.N. Model' smeshannyh effektov zavisimosti vysot ot diametrov derev'ev v sosnovykh drevostoyah / N.N. Dubenok, V.V. Kuz'michev, A.V. Lebedev // Izvestiya Sankt-Peterburgskoj lesotekhnicheskoy akademii. – 2021. – № 237. – S. 59–74. – DOI 10.21266/2079-4304.2021.237.59-74.
21. Geograficheskie kul'tury sosny v lesnoj opytnoj dache Timiryazevskoj akademii: k 180-letiyu M.K. Turskogo / V.D. Naumov, N.L. Povetkina, A.V. Lebedev, A.V. Gemonov. – Moskva : MESKH, 2019. – 182 s.
22. Cieszewski, C.J. New dynamic site equation that fits best the Schwappach data for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) in Central Europe / C.J. Cieszewski, M. Strub, M. Zasada // For Ecol Manag. – 2007. – № 243. – P. 83–93. – DOI: 10.1016/j.foreco.2007.02.025.
23. Richards, F.J. A flexible growth function for empirical use / F.J. Richards // JExp Bot. – 1959. – № 10. – P. 290–300.
24. Lundqvist, B. On the height growth in cultivated stands of pine and spruce in Northern Sweden / B. Lundqvist // Medd Fran Statens Skogforsk. – 1957. – № 47. – P. 1–64.
25. Cieszewski, C.J. Polymorphic height growth and site index curves for Lodgepole Pine in Alberta / C.J. Cieszewski, I.E. Bella // Canadian Journal of Forest Research. – 1989. – № 19. – P. 1151–1160.

26. Schumacher, F.X. A new growth curve and its application to timber yield studies / F.X. Schumacher // J. For. – 1939. – № 37. – P. 819–820.
27. Yang, R.C. The potential of Weibull-type functions as flexible growth curves / R.C. Yang, A. Kozak, J.H.G. Smith // Canadian Journal of Forest Research. – 1978. – № 8 (4). – P. 424–431.
28. Jarosz, K. Modelowanie wzrostu wysokosci przy pomocy funkcji Gompertza / K. Jarosz, B. Klapiec // Sylwan. – 2002. – № 4. – P. 35–42.
29. Ercanli, İ. Dynamic base-age invariant site index models based on generalized algebraic difference approach for mixed Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) and Oriental beech (*Fagus orientalis* Lipsky) stands / İ. Ercanli, A. Kahrman, H. Yavuz // Turk J. Agric. For. – 2014. – № 38. – P. 134–147. – DOI:10.3906/tar-1212-67.