

Научная статья

УДК 630.5

DOI 10.24419/LNI.2304-3083.2022.1.03

Оценка статистических моделей распределения деревьев по диаметру в культурах сосны

Николай Николаевич Дубенок¹

доктор сельскохозяйственных наук, академик РАН

Александр Вячеславович Лебедев²

кандидат сельскохозяйственных наук

Валерий Васильевич Кузьмичев³

доктор биологических наук

Аннотация. В настоящее время для моделирования распределения деревьев по диаметру используется широкий диапазон функций плотности вероятности. Цель исследования – сравнить несколько статистических моделей с точки зрения гибкости и способности оптимально описывать распределение деревьев по диаметру на примере лесных культур сосны. Использованы данные по 231 ряду распределения деревьев по диаметру на 24 постоянных пробных площадях в лесных культурах сосны Лесной опытной дачи Российского государственного аграрного университета – МСХА имени К.А. Тимирязева. В качестве моделей распределения деревьев по диаметру проанализированы 12 функций распределения: бета-распределение, гамма-распределение, Хи-распределение, распределение Хи-квадрат, распределение SB-Джонсона, распределение SU-Джонсона, логнормальное распределение, распределение Накагами, Пирсона III типа, нормальное распределение и распределение Вейбулла. Для оценки соответствия теоретических распределений фактическим данным рассчитывали квадратный корень из среднеквадратической ошибки, среднюю абсолютную ошибку, среднее смещение ошибок и проводили тесты Колмогорова-Смирнова и Хи-квадрат. Анализируя результаты выравнивания рядов распределения деревьев сосны по диаметру в культурах, можно сделать вывод, что по большинству рассмотренных критериев трехпараметрическое распределение Вейбулла в наибольшей степени соответствует фактическим данным. Но в то же время близкие значения метрик качества для различных моделей распределения показывают, что нет однозначного решения относительно того, какую модель считать наиболее подходящей. В качестве лучшей модели целесообразней принимать наиболее гибкую для конкретного набора эмпирических данных.

Ключевые слова: сосна, лесные культуры, распределение деревьев, диаметр дерева, функция распределения.

Для цитирования: Дубенок Н.Н., Лебедев А.В., Кузьмичев В.В. Оценка статистических моделей распределения деревьев по диаметру в культурах сосны // Лесохозяйственная информация. 2022. № 1. С. 50–61. DOI 10.24419/LNI.2304-3083.2022.1.03

¹ Российский государственный аграрный университет – МСХА им. К.А. Тимирязева, заведующий кафедрой сельскохозяйственных мелиораций, лесоводства и землеустройства (Москва, Российская Федерация), ndubenok@mail.ru

² Российский государственный аграрный университет – МСХА им. К.А. Тимирязева, доцент кафедры сельскохозяйственных мелиораций, лесоводства и землеустройства (Москва, Российская Федерация), alebedev@rgau-msha.ru

³ Российский государственный аграрный университет – МСХА им. К.А. Тимирязева, профессор, заведующий лабораторией кафедры сельскохозяйственных мелиораций, лесоводства и землеустройства (Москва, Российская Федерация)

Original article

DOI 10.24419/LHI.2304-3083.2022.1.03

Estimation of Statistical Models of Distribution of Diameters of Trees in Pine Plantations

Nikolay N. Dubenok¹

Doctor of Agricultural Sciences, Academician of the Russian Academy of Sciences

Alexander V. Lebedev²

Candidate of Agricultural Sciences

Valery V. Kuzmichev³

Doctor of Biological Sciences

Abstract. In forestry, a wide range of probability density functions are currently used to model the distribution of tree diameters. The aim of the study is to compare several statistical distribution models in terms of flexibility and ability to best describe the distribution of tree diameters using the example of pine forest plantations. We used data on 231 series of tree diameters distribution on 24 permanent test plots in pine forest plantations of the Forest Experimental Station of the Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy. The 12 distribution functions were analyzed as models of tree diameter distribution: beta distribution, gamma distribution, Chi distribution, Chi-square distribution, SB-Johnson distribution, SU-Johnson distribution, lognormal distribution, Nakagami, Pearson type III, normal distribution and distribution of Weibull. To assess the correspondence of theoretical distributions to the actual data, the square root of the mean square error, the mean absolute error, the mean bias of the errors was calculated, and the Kolmogorov-Smirnov test and the Chi-square test were performed. Analyzing the results of aligning the distribution series of the diameters of pine trees in crops, we can conclude that, according to most of the considered criteria, the Weibull three-parameter distribution is most consistent with the actual data. But at the same time, close values of the quality metrics for different distribution models show that there is no unambiguous decision as to which model is considered the most appropriate. Speaking about the best model, it is better to take as it the most flexible one for a particular set of empirical data.

Key words: pine, forest plantations, tree distribution, tree diameter, distribution function.

For citation: Dubenok N., Lebedev A., Kuzmichev V. Estimation of Statistical Models of Distribution of Diameters of Trees in Pine Plantations // Forestry information. 2022. № 1. P. 50–61. DOI 10.24419 / LHI.2304-3083.2022.1.03

¹ Russian State Agrarian University – K.A. Timiryazev Moscow Agricultural Academy, Head of the Department of Agricultural Land Reclamation, Forestry and Land Management (Moscow, Russian Federation), ndubenok@mail.ru

² Russian State Agrarian University – K.A. Timiryazev Agricultural Academy, Associate Professor of the Department of Agricultural Land Reclamation, Forestry and Land Management (Moscow, Russian Federation), alebedev@rgau-msha.ru

³ Russian State Agrarian University – K.A. Timiryazev Agricultural Academy, Professor, Head of the Laboratory of the Department of Agricultural Land Reclamation, Forestry and Land Management (Moscow, Russian Federation)

Введение

Распределение деревьев по таксационным показателям – простой, но эффективный инструмент для описания структуры популяций деревьев и древостоев, который используют для оценки древесных ресурсов, планирования лесозаготовительных работ, прогнозирования роста и в целом для повышения продуктивности лесов [1–3]. Распределение деревьев по размерам может применяться и для изучения факторов, приводящих к нарушениям в лесных экосистемах, а также для оценки запасов надземной биомассы [4]. При анализе распределений деревьев на уровне отдельных видов их можно использовать для получения информации о стратегиях, темпах и тенденциях восстановления популяций, которые являются видоспецифичными [5, 6].

Традиционно размеры деревьев определяют по диаметру на высоте 1,3 м, а его частотное распределение описывают с помощью распределений вероятностей, далее называемых моделями. Одно из первых исследований распределения деревьев по размеру было проведено De Liocourt в 1898 г. [7]. Он заметил, что при изображении количества деревьев в разновозрастных древостоях по ступеням толщины в виде частотной гистограммы получается кривая обратной J-образной формы. В работах А.В. Тюрина [8], Н.В. Третьякова [9] отмечено, что распределение деревьев в одновозрастных древостоях по толщине описывается симметричной кривой, приближенной по форме к нормальному распределению. Считается, что с 1950-х гг. ученые-лесоводы начали исследовать модели для описания распределений деревьев по диаметру (например, Н.А. Меуер [10]), которые обычно имеют правостороннюю асимметрию.

В лесном хозяйстве для моделирования распределения деревьев по диаметру в настоящее время используют широкий диапазон функций плотности вероятности, хотя наиболее часто применяют трехпараметрическую модель Вейбулла, четырехпараметрическое бета- и SB-Джонсона распределения [11]. Кроме того, известны

подходы к оценке распределений, основанные на непараметрических методах [12–14]. Универсальной модели, способной достоверно описывать все возможные формы распределений деревьев по диаметру, вероятно, не существует, и нет единого мнения относительно того, какая степень гибкости необходима модели для надлежащего описания данных [15]. Поэтому цель исследования – сравнить несколько статистических моделей распределения с точки зрения гибкости и способности оптимально описывать распределение деревьев по диаметру на примере лесных культур сосны.

Материалы и методы исследования

Исследование проводили на основе материалов, собранных в лесных культурах сосны Лесной опытной дачи Российского государственного аграрного университета – МСХА имени К.А. Тимирязева. Лесные культуры заложены в последней четверти XIX в. [16, 17]. Использованы данные по 231 ряду распределения диаметров деревьев на 24 постоянных пробных площадях с начальной густотой посадки от 4 тыс. до 32 тыс. шт./га. На пробных площадях с периодичностью один раз в 5–10 лет с помощью мерной вилки проводили обмер диаметров всех деревьев. Диапазон возрастов древостоев – от 20 до 140 лет, средних диаметров – от 6 до 40 см.

В качестве моделей распределения деревьев по диаметру проанализированы 12 функций распределения (табл. 1): бета, гамма, Хи, Хи-квадрат, SB-Джонсона, SU-Джонсона, логнормальное, Накагами, Пирсона III типа, нормальное, скошенное нормальное и Вейбулла. Многие из них нашли применение при изучении распределения числа деревьев [15, 18, 19].

Приведенные в табл. 1 функции плотности вероятности определены в стандартизированной форме. Для смещения и масштабирования распределения применяли дополнительные параметры – *loc* (смещение) и *scale*

ТАБЛИЦА 1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ	ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ	ПРИМЕЧАНИЕ
Бета	$f(x, a, b) = \frac{\Gamma(a+b)x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$	$0 \leq x \leq 1,$ $a > 0, b > 0$
Гамма	$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)}{\Gamma(\alpha)}$	$x \geq 0,$ $\alpha > 0, \beta > 0$
Chi	$f(x, k) = \frac{1}{2^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{k-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$	$x \geq 0,$ $k > 0$
Chi-квадрат	$f(x, k) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$	$x > 0,$ $k > 0$
SB-Джонсона	$f(x, a, b) = \frac{b}{x(1-x)} \phi\left(a + b \log\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)$	$0 \leq x \leq 1,$ $b > 0$
SU-Джонсона	$f(x, a, b) = \frac{b}{\sqrt{x^2+1}} \phi\left(a + b \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)$	$b > 0$
Логнормальное	$f(x, s) = \frac{1}{sx\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\log^2(x)}{2s^2}\right)$	$x > 0,$ $s > 0$
Накагами	$f(x, \nu) = \frac{2\nu^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{2\nu-1} \exp(-2\nu x^2)$	$x \geq 0,$ $\nu > 0$
Пирсона III типа	$f(x, k) = \frac{ \beta }{\Gamma(\alpha)} (\beta(x-\zeta))^{\alpha-1} \exp(-\beta(x-\zeta))$	$\beta = \frac{2}{k},$ $\alpha = \beta^2 = \frac{4}{k^2},$ $\zeta = -\frac{\alpha}{\beta} = -\beta$
Нормальное	$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}$	
Скошенное нормальное	$f(x, a) = 2\Phi(x)\phi(ax)$	
Вейбулла	$f(x, c) = cx^{c-1} \exp(-x^c)$	$x > 0,$ $c > 0$

Примечание: $\Gamma(\bullet)$ – гамма-функция; $\Phi(\bullet)$ – функция нормального распределения; $\phi(\bullet)$ – плотность вероятности нормального распределения, x – независимая переменная; $a, b, \alpha, \beta, k, \zeta, s, \nu, c$ – параметры распределений.

(масштабирование). С учетом этих параметров плотность вероятности преобразовывается как $f(y)/scale$, где $y = (x - loc)/scale$. Таким образом анализировали модели с максимальным числом параметров, не превышающим 4-х. Модели, имеющие более 4-х параметров, не рассматривали, так как считается, что эти параметры трудно оценить и интерпретировать биологически [15].

Значения параметров функций распределения вычислены методом максимального правдоподобия, который считается наиболее приемлемым [20–22].

Результаты аппроксимации функций распределения сравнивали с помощью таких показателей, как квадратный корень из среднеквадратической ошибки (RMSE), средняя

абсолютная ошибка (MAE), среднее смещение ошибок (MBE):

$$RMSE = \sqrt{\sum \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{n}},$$

$$MAE = \frac{\sum |y_i - \hat{y}_i|}{n},$$

$$MBE = \frac{\sum (\hat{y}_i - y_i)}{n},$$

где:

- n – количество наблюдений;
- y_i – фактическое значение;
- \hat{y}_i – предсказанное по модели значение.

Степень соответствия (на 5 %-м уровне значимости) исследуемых моделей реальным данным оценивалась путем сравнения эмпирической функции распределения с предсказанной. Статистика Колмогорова-Смирнова (D_n) была рассчитана для максимального абсолютного расстояния между наблюдаемыми и прогнозируемыми значениями функций распределения [23, 24]:

$$D_n = \sup_x |F(x_i) - F_0(x_i)|,$$

где:

- $F(x_i)$ – кумулятивное частотное распределение, наблюдаемое для элемента выборки x_i ($i = 1, 2, \dots, n$);
- $F_0(x_i)$ – вероятность теоретического кумулятивного распределения частот.

Кроме того, в качестве критерия согласия для сопоставления плотностей вероятности диаметров при 5 %-м уровне значимости применяли тест Хи-квадрат. В соответствии с теоретическим распределением диаметров критерий χ^2 с $m - k - 1$ степенями свободы (k – количество параметров распределения) рассчитывается следующим образом [25, 26]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i},$$

где:

- m – количество ступеней толщины;
- n_i – фактическое количество деревьев в i -й ступени толщины;

\hat{n}_i – теоретическое количество деревьев в i -й ступени толщины.

Анализ данных проводили с использованием Python 3.5 с библиотеками NumPy 1.17.1 и SciPy 1.3.2.

Результаты и обсуждение

Усредненные метрики качества выравнивания эмпирических распределений диаметров приведены в табл. 2. Использовались данные по 231 ряду распределения от молодняков до перестойных древостоев. Для всех рассматриваемых моделей распределения нулевая гипотеза о принадлежности эмпирического распределения теоретическому с использованием теста Колмогорова-Смирнова при уровне значимости 0,05 не отклоняется в 68–84 % случаев, а с использованием теста Хи-квадрат – в 32–54 % случаев. Полученные несоответствия в результатах двух тестов связаны с различными способами расчета статистики. Если в тесте Хи-квадрат сопоставляются частоты плотности вероятности, то в тесте Колмогорова-Смирнова – накопленные частоты функции распределения. Кроме того, эти критерии отличаются по статистической мощности. Критерий Колмогорова-Смирнова характеризуется меньшей мощностью по сравнению с критерием Хи-квадрат [27].

Для эмпирических и теоретических функций распределения рассчитанные метрики RMSE, MAE и MBE показывают, что лучший результат выравнивания демонстрируют распределения Хи, Хи-квадрат, Накагами, скошенное нормальное и Вейбулла. По сумме накопленных рангов, относительно всех статистик соответствия, выделены 4 теоретические модели распределения, которые в лучшей степени соответствуют эмпирическим распределениям. К ним относятся скошенное нормальное распределение, Хи-распределение, распределение Накагами и распределение Вейбулла. По критериям Колмогорова-Смирнова и Хи-квадрат хорошие результаты показывают бета-распределение и Пирсона III типа, которые

ТАБЛИЦА 2. СТАТИСТИКИ СООТВЕТСТВИЯ ПРОСТЫХ МОДЕЛЕЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ	ТЕСТ КОЛМОГорова-СМИРНОВА		ТЕСТ ХИ-КВАДРАТ		RMSE	MAE	MBE
	СТАТИСТИКА	ЗНАЧИМОСТЬ ПРИ $\alpha = 0,05$, %	СТАТИСТИКА	ЗНАЧИМОСТЬ ПРИ $\alpha = 0,05$, %			
Бета	0,113	84	25,2	51	0,048	0,038	0,034
Гамма	0,135	69	35,5	32	0,044	0,037	0,024
Хи	0,118	79	29,3	47	0,042	0,034	0,027
Хи-квадрат	0,135	69	35,5	32	0,044	0,037	0,024
SB-Джонсона	0,124	81	28,4	46	0,054	0,043	0,033
SU-Джонсона	0,106	82	29,1	40	0,045	0,036	0,032
Логнормальное	0,119	79	28,1	45	0,053	0,042	0,034
Накагами	0,118	79	29,3	47	0,042	0,034	0,027
Пирсона III типа	0,118	68	27,6	51	0,043	0,033	0,032
Нормальное	0,121	74	37,2	33	0,055	0,041	0,035
Скошенное нормальное	0,106	83	26,6	54	0,043	0,034	0,031
Вейбулла	0,112	84	30,1	45	0,043	0,035	0,029

часто используют для описания распределения деревьев по диаметру. Но для кривых, по форме близких к нормальным, бета-распределение дает неудовлетворительные результаты выравнивания, поэтому оно может быть использовано в качестве модели распределения деревьев по диаметру только при выраженной правосторонней асимметрии.

Для асимметричных распределений, по сравнению с другими рассматриваемыми моделями, бета-распределение показывает один из лучших результатов: обеспечивается согласованность между первым, вторым, третьим и четвертым моментами, как и в экспериментальных данных. В пользу применения бета-распределения (первый тип распределения Пирсона) высказывались, например, А.А. Макаренко [28, 29], И.Е. Остромильская [30], П.М. Верхунов [31], которые считали его универсальным, в том числе за счет строгого ограничения слева и справа.

Сумма площадей поперечных сечений (G , м²) функционально связана с распределением числа деревьев (N_i) по ступеням толщины (d_i , см):

$$G = \sum \pi N_i \left(\frac{d_i}{200} \right)^2$$

и второго моментов распределения в этой

формуле зависит среднеквадратический диаметр. Поэтому его можно считать таксационным показателем, указывающим одновременно и на точность выравнивания рядов распределения, и на точность определения суммы площадей поперечных сечений (запасов) для обеспечения согласованности с моделями роста на уровне древостоя.

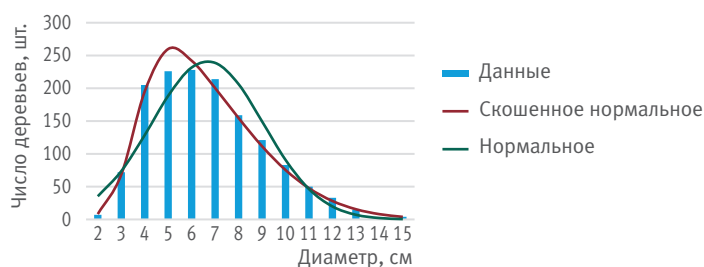
Усредненные метрики качества для среднеквадратического диаметра, рассчитанного через рассматриваемые функции распределения, приведены в табл. 3. Так как параметрами нормального распределения являются математическое ожидание и дисперсия, то для всех эмпирических и теоретических рядов распределения получено полное совпадение значений среднеквадратического диаметра. Для остальных моделей по всем рассматриваемым метрикам усредненные значения RMSE составляют от 0,034 до 0,660, MAE – от 0,023 до 0,151.

По сумме накопленных рангов, относительно рассматриваемых метрик качества, наименьшие расхождения между фактическими и рассчитанными по модели распределения значениями среднеквадратического диаметра получены для нормального распределения,

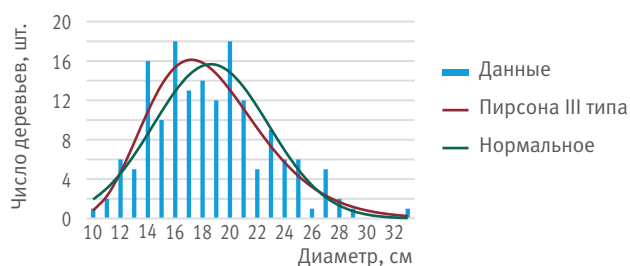
Таблица 3. Усредненные метрики качества прогноза среднеквадратического диаметра

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ	МЕТРИКИ СООТВЕТСТВИЯ		
	RMSE	MAE	MBE
Бета	0,300	0,096	-0,040
Гамма	0,190	0,150	-0,150
Хи	0,074	0,049	0,042
Хи-квадрат	0,074	0,049	0,042
SB-Джонсона	0,660	0,151	-0,064
SU-Джонсона	0,150	0,042	-0,040
Логнормальное	0,048	0,023	-0,021
Накагами	0,074	0,049	0,042
Пирсона III типа	0,235	0,055	-0,038
Нормальное	0,000	0,000	0,000
Скошенное нормальное	0,071	0,037	0,022
Вейбулла	0,034	0,023	0,018

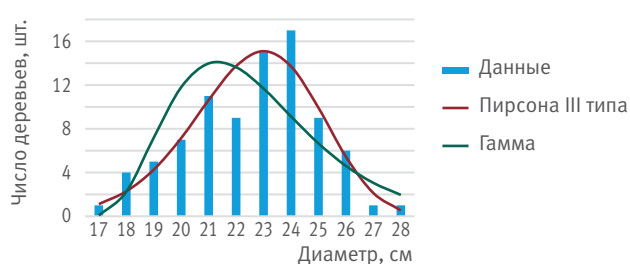
21 год
Скошенное нормальное: $\chi^2 = 14,2$; $p = 0,22$; нормальное: $\chi^2 = 135,4$; $p < 0,0001$



59 лет
Пирсона III типа: $\chi^2 = 20,1$; $p = 0,52$; нормальное: $\chi^2 = 42,1$; $p = 0,0061$



102 года
Пирсона III типа: $\chi^2 = 5,01$; $p = 0,83$; гамма: $\chi^2 = 27,8$; $p = 0,0007$



СООТВЕТСТВИЕ ХУДШИХ И ЛУЧШИХ МОДЕЛЕЙ ЭМПИРИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ В КУЛЬТУРАХ СОСНЫ РАЗНОГО ВОЗРАСТА (ПОСТОЯННАЯ ПРОБНАЯ ПЛОЩАДЬ 4/Б)

распределения Вейбулла, логнормального и скошенного нормального распределения. Для скошенного нормального и распределения Вейбулла преобладают несколько заниженные значения ($MBE > 0$), а для логнормального распределения характерно завышение среднеквадратического диаметра ($MBE < 0$).

Несмотря на хорошие результаты всех рассматриваемых метрик качества, распределение Вейбулла в редких случаях является самой лучшей моделью. Гибкость и универсальность кривой распределения Вейбулла проявляется в промежуточном положении между самыми плохими и лучшими моделями, что позволяет достоверно описывать разнообразные по форме унимодальные эмпирические распределения.

На рисунке в качестве примера показано соответствие (по критерию Хи-квадрат) между фактическими данными и самыми худшими и лучшими моделями распределения для соснового древостоя на постоянной пробной площади 4/Б в возрасте 21 год, 59 лет и 102 года. В течение этого временного промежутка произошло изменение формы распределения деревьев по диаметру. В 21 год вершина распределения смещена влево относительно его центра, т.е. преобладают деревья меньших

ступеней толщины. К возрасту спелости кривая распределения приобретает симметричную относительно центра форму, преобладающими становятся деревья центральных ступеней толщины. Асимметричные кривые в молодняках хорошо аппроксимируются скошенным нормальным распределением, но его применение на практике затруднено из-за невозможности биологической интерпретации параметров. В приспевающих и спелых древостоях лучшее соответствие фактическим данным показывает распределение Пирсона III типа. Нормальное и гамма-распределения дают худшие результаты. Данные закономерности характерны и для остальных пробных площадей.

Заключение

Анализируя результаты выравнивания рядов распределения деревьев по диаметру сосны в культурах, можно сделать вывод, что по большинству рассмотренных критериев трехпараметрическое распределение Вейбулла в наибольшей степени соответствует фактическим данным. В то же время близкие значения метрик качества для различных моделей распределения показывают, что нет однозначного решения относительно того, какую модель считать наиболее подходящей. В качестве лучшей модели целесообразно принимать наиболее гибкую для конкретного набора эмпирических данных.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Baile, R.L. Quantifying diameter distributions with the Weibull function / R.L. Baile, T.R. Dell // For. Sci. – 1973. – № 19. – P. 97–104.
2. Hyink, D.M. A generalized framework for projecting forest yield and stand structure using diameter distributions / D.M. Hyink, J.W. Moser // For. Sci. – 1983. – № 29. – P. 85–95.
3. Individual height-diameter models for young black spruce (*Picea mariana*) and jack pine (*Pinus banksiana*) plantations in New Brunswick, Canada / X. Lei, C. Peng, H. Wang, X. Zhou // Forest. Chron. – 2009. – № 85. – P. 43–56. – DOI: 10.5558/tfc85043-1.
4. Coomes, D.A. Mortality and tree-size distributions in natural mixed-age forests / D.A. Coomes, R.B. Allen // J. Ecol. – 2007. – № 95. – P. 27–40.
5. Knight, D.H. A phytosociological analysis of species-rich tropical forest on Barro Colorado Island, Panama / D.H. Knight // Ecol. Monogr. – 2007. – № 45. – P. 259–284.
6. Gap-dependent recruitment, realized vital rates, and size distributions of tropical trees / S.J. Wright, H.C. Muller-Landau, R. Condit, S.P. Hubbell // Ecology. – 2003. – № 84. – P. 3174–3185.
7. Ogana, F.N. Comparison of beta, Gamma and Weibull distributions for characterizing tree diameter in Oluwa Forest Reserve, Ondo State, Nigeria / F.N. Ogana, J.S.A. Osho, J.J. Gorgoso-Varela // Journal of Natural Sciences Research. – 2015. – № 5(4). – P. 28–36.
8. Тюрин, А.В. Таксация леса / А.В. Тюрин. – 2-е изд. – М. : Гослестехиздат, 1945. – 376 с.
9. Третьяков, Н.В. Закон единства в строении насаждений / Н.В. Третьяков. – М.-Л. : Новая деревня, 1927. – 113 с.
10. Meyer, H.A. Structure, growth, and drain in balanced uneven-aged forests / H.A. Meyer // J. For. – 1952. – № 50. – P. 85–92.
11. Wang, M. Tree diameter distribution modelling: introducing the logit–logistic distribution / M. Wang, K. Rennolls // Can. J. For. Res. – 2005. – № 35. – P. 1305–1313. – DOI: 10.1139/X05-057.
12. Percentile-based distributions characterize forest stand tables / B.E. Borders, R.A. Souter, R.L. Bailey, K.D. Ware // For. Sci. – 1987. – № 33. – P. 570–576.
13. Ciceu, A. Modeling the Diameter Distribution of Mixed Uneven-Aged Stands in the South Western Carpathians in Romania / A. Ciceu, D. Pitar, O. Badea // Forests. – 2021. – № 12. – id 958. – DOI: 10.3390/f12070958.
14. Хлюстов, В.К. Товарно-денежный потенциал древостоев и оптимизация лесопользования / В.К. Хлюстов, А.В. Лебедев. – Иркутск : Мегалит, 2017. – 328 с.
15. de Lima R.A.F. Modeling Tree Diameter Distributions in Natural Forests: An Evaluation of 10 Statistical Models / R.A.F. de Lima, J.L.F. Batista, P.I. Prado // For. Sci. – 2015. – № 61. – P. 320–327. – DOI: 10.5849/forsci.14-070.
16. Дубенок, Н.Н. Результаты экспериментальных работ за 150 лет в Лесной опытной даче Тимирязевской сельскохозяйственной академии / Н.Н. Дубенок, В.В. Кузьмичев, А.В. Лебедев. – М. : Наука, 2020. – 382 с.
17. Дубенок, Н.Н. Рост и продуктивность древостоев сосны и лиственницы в условиях городской среды / Н.Н. Дубенок, В.В. Кузьмичев, А.В. Лебедев // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Сер.: Лес. Экология. Природопользование. – 2018. – № 1(37). – С. 54–71. – DOI 10.15350/2306-2827.2018.1.54.
18. Товарные таблицы для таксации сосняков искусственного происхождения Поволжья / В.Л. Черных, А.А. Домрачев, А.С. Елсуков, Н.Г. Киселева, Н.Н. Охотин // Вестник Алтайского государственного аграрного университета. – 2009. – № 4 (54). – С. 35–41.
19. Fatigue Statistical Distributions Useful for Modeling Diameter and Mortality of Trees / V. Leiva, M.G. Ponce, C. Marchant, O. Bustos // Revista Colombiana de Estadística. – 2012. – № 35(3). – P. 349–370.

20. Projeção da distribuição diamétrica de povoamentos de eucalipto em diferentes amplitudes de classe / C.A. Jr. Araújo, G.S. Nogueira, M.L.R. Oliveira, R.O.V. Miranda, R.V.O. Castro, E. Pelli // Pesquisa Agropecuária Brasileira. 2010. – № 45(11). – P. 1275–1281. – DOI: 10.1590/S0100-204X2010001100007.
21. Prediction System for Diameter Distribution and Wood Production of Eucalyptus / R. Miranda, L. Fiorentin, S.P. Netto, R. Juvanhof, A.D. Corte // Floresta Ambient. – 2018. – № 25(3). – DOI: 10.1590/2179-8087.054816.
22. Teimouri, M. Evaluation of estimation methods for parameters of the probability functions in tree diameter distribution modeling / M. Teimouri, K. Abdolhnezhad, Sh. Ghalandarayeshi // Environmental Resources Research. – 2020. – № 8(1). – 2020. – P. 25–40.
23. Pogoda, P. Modeling Diameter Distribution of Black Alder (*Alnus glutinosa* (L.) Gaertn.) Stands in Poland / P. Pogoda, W. Ochał, S. Orzeł // Forests. – 2019. – № 10. – id 412. – DOI: 10.3390/f10050412.
24. Ogana, F.N. Modeling diameter distributions of Gmelina arborea plantation in Omo Forest Reserve, Nigeria with Johnson's SB / F.N. Ogana, E.S. Itam, J.S.A. Osho // Journal of Sustainable Forestry. – 2016. – DOI: 10.1080/10549811.2016.1263575.
25. Diameter Distribution of Semi-natural Mixed Forest of *Pinus massoniana* and Broadleaved Trees Based on Stratification / J. Wang, M. Yan, Q. Huang, R. Huang, Q. Zheng // Forest Research. – 2021. – № 34(3). – P. 72–80. – DOI: 10.13275/j.cnki.lykxyj.2021.03.008.
26. Chen, Y. Stand Diameter Distribution Modeling and Prediction Based on Maximum Entropy Principle / Y. Chen, B. Wu, Z. Min // Forests. – 2019. – № 10(10). – id 859. – DOI: 10.3390/f10100859.
27. Лемешко, Б.Ю. Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах. I. Проверка простых гипотез / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – Т. XI. – № 2 (34). – С. 96–111.
28. Макаренко, А.А. К методике изучения древостоя / А.А. Макаренко // Лесообразовательные процессы на Урале : тр. Ин-та экологии растений и животных. – Вып. 67. – Свердловск, 1970. – С. 242–251.
29. Макаренко, А.А. О свойствах рядов распределения деревьев в древостоях / А.А. Макаренко // Лесоведение. – 1975. – № 6. – С. 42–60.
30. Остромогильская, И.Е. Закономерности распределения деревьев по толщине в совокупности однородных насаждений / И.Е. Остромогильская // Современное лесоустройство и таксация леса. – М. : ВНИИЛМ, 1974. – Вып. 4. – С. 200–206.
31. Верхунов, П.М. Закономерности строения разновозрастных сосняков / П.М. Верхунов. – Новосибирск : Наука, 1976. – 256 с.

References

1. Baile, R.L. Quantifying diameter distributions with the Weibull function / R.L. Baile, T.R. Dell // For. Sci. – 1973. – № 19. – P. 97–104.
2. Hyink, D.M. A generalized framework for projecting forest yield and stand structure using diameter distributions / D.M. Hyink, J.W. Moser // For. Sci. – 1983. – № 29. – P. 85–95.
3. Individual height-diameter models for young black spruce (*Picea mariana*) and jack pine (*Pinus banksiana*) plantations in New Brunswick, Canada / X. Lei, C. Peng, H. Wang, X. Zhou // Forest. Chron. – 2009. – № 85. – P. 43–56. – DOI: 10.5558/tfc85043-1.
4. Coomes, D.A. Mortality and tree-size distributions in natural mixed-age forests / D.A. Coomes, R.B. Allen // J. Ecol. – 2007. – № 95. – P. 27–40.
5. Knight, D.H. A phytosociological analysis of species-rich tropical forest on Barro Colorado Island, Panama / D.H. Knight // Ecol. Monogr. – 2007. – № 45. – P. 259–284.

6. Gap-dependent recruitment, realized vital rates, and size distributions of tropical trees / S.J. Wright, H.C. Muller-Landau, R. Condit, S.P. Hubbell // *Ecology*. – 2003. – № 84. – P. 3174–3185.
7. Ogana, F.N. Comparison of beta, Gamma and Weibull distributions for characterizing tree diameter in Oluwa Forest Reserve, Ondo State, Nigeria / F.N. Ogana, J.S.A. Osho, J.J. Gorgoso-Varela // *Journal of Natural Sciences Research*. – 2015. – № 5(4). – P. 28–36.
8. Tyurin, A.V. Taksaciya lesa / A.V. Tyurin. –2-e izd. – M. : Goslestekhzdat, 1945. – 376 s.
9. Tret'yakov, N.V. Zakon edinstva v stroenii nasazhdenij / N.V. Tret'yakov. – M.-L. : Novaya derevnya, 1927. – 113 s.
10. Meyer, H.A. Structure, growth, and drain in balanced uneven-aged forests / H.A. Meyer // *J. For.* – 1952. – № 50. – P. 85–92.
11. Wang, M. Tree diameter distribution modelling: introducing the logit–logistic distribution / M. Wang, K. Rennolls // *Can. J. For. Res.* – 2005. – № 35. – P. 1305–1313. – DOI: 10.1139/X05-057.
12. Percentile-based distributions characterize forest stand tables / B.E. Borders, R.A. Souter, R.L. Bailey, K.D. Ware // *For. Sci.* – 1987. – № 33. – P. 570–576.
13. Ciceu, A. Modeling the Diameter Distribution of Mixed Uneven-Aged Stands in the South Western Carpathians in Romania / A. Ciceu, D. Pitar, O. Badea // *Forests*. – 2021. – № 12. – id 958. – DOI: 10.3390/f12070958.
14. Hlyustov, V.K. Tovarno-denezhnyj potencial drevostoev i optimizaciya lesopol'zovaniya / V.K. Hlyustov, A.V. Lebedev. – Irkutsk : Megaprint, 2017. – 328 s.
15. de Lima R.A.F. Modeling Tree Diameter Distributions in Natural Forests: An Evaluation of 10 Statistical Models / R.A.F. de Lima, J.L.F. Batista, P.I. Prado // *For. Sci.* – 2015. – № 61. – P. 320–327. – DOI: 10.5849/forsci.14-070.
16. Dubenok, N.N. Rezul'taty eksperimental'nyh rabot za 150 let v Lesnoj opytnoj dache Timiryazevskoj sel'skohozyajstvennoj akademii / N.N. Dubenok, V.V. Kuz'michev, A.V. Lebedev. – M. : Nauka, 2020. – 382 s.
17. Dubenok, N.N. Rost i produktivnost' drevostoev sosny i listvennicy v usloviyah gorodskoj sredy / N.N. Dubenok, V.V. Kuz'michev, A.V. Lebedev // *Vestnik Povolzhskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta. Ser.: Les. Ekologiya. Prirodopol'zovanie*. – 2018. – № 1(37). – S. 54–71. – DOI 10.15350/2306-2827.2018.1.54.
18. Tovarnye tablicy dlya taksacii sosnyakov iskusstvennogo proiskhozhdeniya Povolzh'ya / V.L. Chernyh, A.A. Domrachev, A.S. Elsukov, N.G. Kiseleva, N.N. Ohotin // *Vestnik Altaiskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta*. – 2009. – № 4 (54). – S. 35–41.
19. Fatigue Statistical Distributions Useful for Modeling Diameter and Mortality of Trees / V. Leiva, M.G. Ponce, C. Marchant, O. Bustos // *Revista Colombiana de Estadística*. – 2012. – № 35(3). – P. 349–370.
20. Projeção da distribuição diamétrica de povoamentos de eucalipto em diferentes amplitudes de classe / C.A.Jr. Araújo, G.S. Nogueira, M.L.R. Oliveira, R.O.V. Miranda, R.V.O. Castro, E. Pelli // *Pesquisa Agropecuária Brasileira*. 2010. – № 45(11). – P. 1275–1281. – DOI: 10.1590/S0100-204X2010001100007.
21. Prediction System for Diameter Distribution and Wood Production of Eucalyptus / R. Miranda, L. Fiorentin, S.P. Netto, R. Juvanhol, A.D. Corte // *Floresta Ambient.* – 2018. – № 25(3). – DOI: 10.1590/2179-8087.054816.
22. Teimouri, M. Evaluation of estimation methods for parameters of the probability functions in tree diameter distribution modeling / M. Teimouri, K. Abdolhazehad, Sh. Ghalandarayeshi // *Environmental Resources Research*. – 2020. – № 8(1). – 2020. – P. 25–40.
23. Pogoda, P. Modeling Diameter Distribution of Black Alder (*Alnus glutinosa* (L.) Gaertn.) Stands in Poland / P. Pogoda, W. Ochał, S. Orzeł // *Forests*. – 2019. – № 10. – id 412. – DOI: 10.3390/f10050412.
24. Ogana, F.N. Modeling diameter distributions of Gmelina arborea plantation in Omo Forest Reserve, Nigeria with Johnson's SB / F.N. Ogana, E.S. Itam, J.S.A. Osho // *Journal of Sustainable Forestry*. – 2016. – DOI: 10.1080/10549811.2016.1263575.
25. Diameter Distribution of Semi-natural Mixed Forest of *Pinus massoniana* and Broadleaved Trees Based on Stratification / J. Wang, M. Yan, Q. Huang, R. Huang, Q. Zheng // *Forest Research*. – 2021. – № 34(3). – P. 72–80. – DOI: 10.13275/j.cnki.lykxyj.2021.03.008.

26. Chen, Y. Stand Diameter Distribution Modeling and Prediction Based on Maximum Entropy Principle / Y. Chen, B. Wu, Z. Min // *Forests*. – 2019. – № 10(10). – id 859. – DOI: 10.3390/f10100859.
27. Lemesheko, B.Yu. Sravnitel'nyy analiz moshchnosti kriteriev soglasiya pri blizkih konkuriruyushchih gipotezah. I. Proverka prostyh gipotez / B.Yu. Lemesheko, S.B. Lemesheko, S.N. Postovalov // *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki*. – 2008. – T. XI. – № 2 (34). – S. 96–111.
28. Makarenko, A.A. K metodike izucheniya drevostoya / A.A. Makarenko // *Lesoobrazovatel'nye processy na Urale* : tr. In-ta ekologii rastenii i zivotnyh. – Vyp. 67. – Sverdlovsk, 1970. – S. 242–251.
29. Makarenko, A.A. O svoystvah ryadov raspredeleniya derev'ev v drevostoyah / A.A. Makarenko // *Lesovedenie*. – 1975. – № 6. – S. 42–60.
30. Ostromogil'skaya, I.E. Zakonomernosti raspredeleniya derev'ev po tolshchine v sovokupnosti odnorodnyh nasazhdenij / I.E. Ostromogil'skaya // *Sovremennoe lesoustrojstvo i taksaciya lesa*. – M. : VNIILM, 1974. – Vyp. 4. – S. 200–206.
31. Verhunov, P.M. Zakonomernosti stroeniya raznovozrastnyh sosnyakov / P.M. Verhunov. – Novosibirsk : Nauka, 1976. – 256 s.